```
pour i de 1 à n-1 faire
|(k,l) ← Recherche pivot-total(A,i)
|si (i ≠ k) alors :
|  { L_i ⇄ L_k
|  }
|si (i ≠ l) alors
|  { C_i ⇄ C_l
|    T[i] ⇄ T[l]
|  }
|  pivot ← a_ii
|}
|si pivot ! = 0 alors
|  pour j de i+1 à n faire
|    L_j ← L_j - (a_ji / pivot) L_i
|  Fin Pour
|  Fin Si
Fin Pour
```

-5- Méthode L.U :

Le principe de la méthode L.U est décrire la matrice A de système $AX = b$ (de taille n) comme un produit de deux matrices $A = L.U$ avec L est une matrice triangulaire ayant des 1 sur la diagonale

U est une matrice triangulaire supérieur. si ce possible

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ l_{21} & 1 & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} \; 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{lower}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{upper}$$

si A s'écrit de cette façons (c-à-d A s'écrit de la forme L.U.)

pour résoudre (E) on procède l'étape :

on pose $Y = UX$

$(\mathcal{E}_1)$: $LY = b \Rightarrow Y$ sachant Y connu

$(\mathcal{E}_2)$: $UX = Y \Rightarrow X$

Scanné avec CamScanner

$(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont facile de resoudre de faite que $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont deux matrices triangulaires.

Théorème :

Soit A une matrice carrée de taille n dont tout les sous matrice principale sont inversible Alors il existe L et U telque $A = L.U$ avec L est une matrice triangulaire inférieur ayant des 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieur.

si $\forall i = 1 \dots n$; $\det(A_{ii}) \neq 0$ alors $\exists$ L et U $\quad A = L.U$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ l_{21} & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} \; 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (a_{11})$

$\vdots$

$A_{nn} = A$

Exercice :

Verifier si la matrice de l'exp precedent admet une decomposition L.U

Rep:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ La matrice A de taille $n = 3$.

$A_{11} = (1) \Rightarrow \det(1) = 1 \neq 0$ donc A_{11} est une matrice inversible.

$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{22}) = 1 \neq 0 \Rightarrow A_{22}$ est une matrice inversible

$A_{33} = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{33}) = 1 \neq 0 \Rightarrow A_{33}$ est une matrice inversible

$\Rightarrow$ Toutes les sous-matrices principales sont inversibles, Donc A admet une decomposition L.U.

Scanné avec CamScanner

- 2 - comment déterminer L et U.

Rq:
si une matrice A de taille n admet une factorisation L.U, alors

$$\det(A) = \det(L)\cdot\det(U) = \det(L.U)$$

$$= \underbrace{\prod_{i=1}^{n} l_{ii}}_{=1} \prod_{i=1}^{n} (U_{ii}) \Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}$$

pour déterminer L et U, on peut utiliser 2 méthodes

- 1 - Élimination de Gauss à pivot simple

La transformation d'une matrice A de taille n en une matrice triangulaire supérieur par la méthode de Gauss à pivot simple permet d'obtenir la matrice U. Ensuite, sachant A et U (A et U connus) on peut déterminer les coefficient de L par identification et utilisant la formule de Produit matriciel.

Rappel:
si $C = A * B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ avec $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$\forall i = 1..n$
$\forall j = 1..p$
$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = <i^{ème} \text{ ligne de } A, j^{ème} \text{ colonne de } B>$ produit scalaire.

Exp: considérons la matrice précédent, Déterminer L et U.

Rep:

n = 3 => 2 itérations;

* itérations i = 1; $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, la matrice après l'élimination

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sachant A et U:

$$L.U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ l_{21} & -l_{21}+1 & \leftarrow 2l_{21}-3 \\ l_{31} & l_{31}+l_{32} & \leftarrow 2l_{31}-3l_{32}+1 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$L.U = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; par identification $\begin{cases} l_{21} = 2 ; \\ l_{31} = -1 ; \\ -l_{31} l_{32} = 1 \end{cases}$ ↓ $l_{32} = 0$

$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

-2- Méthode de Crout :

Cette méthode consiste à écrire $L.U = A$ d'une manière formelle et on utilisons la formule de Produit matriciel on procedent à une identification ligne par ligne et colonne par colonne.

$A = L.U.$

c-à-d $\forall i = 1 \dots n \quad \forall j = 1 \dots n$; $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} U_{kj} = \langle$ i ième ligne de L, j ème colonne de U $\rangle$

$= \langle (l_{i1} \dots l_{i,i} \dots 1 0 \dots 0), \begin{pmatrix} U_{1j} \\ \vdots \\ U_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} U_{kj}$

Identification :

* ligne $i = 1$;

pour l'inconnu de la ligne 1 de L. $(1 0 \dots 0)$

- colonne j de 1 à n $(\min(1, j) = 1)$

$a_{1j} = \sum_{k=1}^{1} l_{11} \cdot U_{1j} = l_{11} \cdot U_{1j} \Rightarrow \boxed{U_{1j} = a_{1j}}$ ($l_{11} = 1$)

$(U_{11} U_{12} \dots U_{1n})$ 1ère ligne de U

Supposons qu'on connait la lignes de 1 à "i-1" de L et U, cherchons à determiner la ligne i de L et de U. $(i = 2 \dots n)$

connu par hyp $\begin{cases} 1 0 \dots 0 \\ l_{21} 1 0 \dots 0 \\ \vdots \\ l_{i-1,1} \dots l_{i-1,i-2} 1 0 \dots 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} U_{11} \dots \dots U_{1n} \\ \vdots \\ U_{i-1,i-1} \dots U_{i-1,n} \end{matrix}$

à déterminer $l_{i,1} \dots l_{i,i-1} 1 0 \dots 0$ $\quad U_{ii} \dots U_{in}$

* ligne i (de 2 à n) fixé ; les lignes de 1 à i-1 sont connues par hyp

- colonne $j=1$ $\quad \min(i,1)=1$

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik} u_{k1} = l_{i1} u_{11} \quad \text{(connu)} \Rightarrow \boxed{l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}} \quad \text{à cond}^{\text{t}} \; u_{11} \neq 0$$

- colonne j (de 2 à $i-1$) $\quad \min(i,j)=j$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ij} u_{jj}$$

($\sum$ connu par hyp)

$$\Rightarrow \boxed{l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}}$$

- colonne j (de i à n), $\min(i,j)=i$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + \underbrace{l_{ii}}_{=1} \cdot u_{ij}$$

($\sum$ connu)

$$\Rightarrow \boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}$$

Algo Crout
Entrée $A \in M_{n*n}$
Sortie $L \in M_{n*n}$, $U \in M_{n*n}$

Début
/* initialisation */
$L \leftarrow I_{n*n}$
$U \leftarrow 0_{n*n}$
/* 1ère ligne */
pour j de 1 à n faire
| $u_{1j} \leftarrow a_{1j}$
Fin Pour

pour i de 2 à n faire
| $l_{i1} \leftarrow a_{i1} / u_{11}$
| Pour j de 2 à "i-1" faire
| | $l_{ij} \leftarrow \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}$
| Fin Pour
| Pour j de i à n faire
| | $u_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$
| Fin Pour
Fin Pour
Retourner (L, U)
Fin.

Scanné avec CamScanner

Exp: Appliquer l'algorithme de Crout sur l'exp précédent

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $n=3$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

pour j de 1 à 3 faire: $\Rightarrow$ $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$U_{1j} \leftarrow a_{1j}$

* $i = 2$:

$l_{21} \leftarrow \frac{a_{21}}{U_{11}} \Rightarrow l_{21} \longrightarrow \frac{2}{1} = 2$ $\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* pour $j = 2$:

$U_{22} \leftarrow \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} U_{k2}\right) \Rightarrow U_{22} \leftarrow -1 - (2 \times -1)$

$\Rightarrow U_{22} \leftarrow 1$ $\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* pour $j = 3$:

$U_{23} \leftarrow a_{23} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} U_{k3} \Rightarrow U_{23} \leftarrow 1 - (2 \times 2) = -3$

$l_{21} U_{13}$ $\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $i = 3$

* $j = 1$: $l_{31} \leftarrow \frac{a_{31}}{U_{11}}$, $l_{31} \leftarrow -1$

* $j = 2$: $l_{32} \leftarrow \left(a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{3k} U_{k2}\right) / U_{22}$

$l_{32} \leftarrow 1 - ((-1 \times -1)) / 1$

$l_{32} \leftarrow 1 - 1 \Rightarrow l_{32} = 0$

* $j = 3$:

$U_{33} \leftarrow \left(a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k} U_{k3}\right)$

$\leftarrow a_{33} - (l_{31} U_{13} + l_{32} U_{23})$

$\leftarrow -1 - ((-1 \times 2) + (0 \times 1)) = (-1 - (-2)) = 1$

$U_{33} \leftarrow 1$ $\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

* $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

* on pose $y = U.X$; le système (E_1): $L.y = b$ avec $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = -1 \\ -y_1 + y_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -3 \\ y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le système (E_2): $U.X = y$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-6- Methode de Cholesky :

Cholesky : $A = LL^T = R^T R$ $\quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^{inf}(\mathbb{R})$

• La décomposition de Cholesky consiste à écrire une matrice A comme un produit de matrice $L \times L^T$ avec L est une matrice triang. inf. de taille n

• pour resoudre (E): $AX = b$ si A admet cette décomposition (factorisation) se fait en deux étape :

Etape1. on pose $y = L^T.X$ on obtient le système $L.y = b$: (E_1)

En resolvant (E_1) on obtient y connu sachant y et L on resout le système (E_2): $L^T.X = y$.

(E_1) et (E_2) sont faciles à resoudre car sont deux système à matrice triangulaire.

Théorème :

Soit A une matrice carrée de taille n, si A verifie on a la condition :

Scanné avec CamScanner

l'algo. permettant d'obtenir L à partir de en utilisant la factorisa

(i) A est symétrique ($A = A^T$)

(ii) A est définie positive ($\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $x^T . Ax > 0$) Alors

$\exists L$ tel que L est une matrice triangulaire inf de taille n et $A = LL^T$

et on a $\det A = \det(L) \det(L^T) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2$

. Si on choisi tout les $l_{ii} > 0$ alors la matrice L est unique.

Rq:

A est définie positive ssi $sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ sp (l'ensemble des valeurs propre

1 Détermination de L à partir de A:

En utilisant la formule de produit matriciel et procédant à une identification colonne par colonne et ligne par ligne.

l'algo. permettant d'obtenir de L à partir de A:

Formule de produit matriciel: pour tout j de 1 à n

$A = LL^T \iff \forall i = 1 \dots n, \forall j = 1 \dots n :$ a_{ij} = <i ème ligne de L ; j ème colonne de L^T>

$\Rightarrow a_{ij} = \left\langle (l_{i1} l_{i2} \dots l_{ii} 0 \dots 0) ; \begin{pmatrix} l_{j1} \\ l_{j2} \\ \vdots \\ l_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} l_{jk}$

$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$ ligne i

Pour j de 1 à n ⇐ pour i de j à n $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & x & 0 & & \vdots \\ 3 & & x & & \\ \vdots & & & & \\ n & & & & x \end{pmatrix}$ ⇐ $L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & & l_{n2} \\ \vdots & & l_{jj} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix}$ ⇐

colonne j

Scanné avec CamScanner

l'algo. permettant d'obtenir L à partir de en utilisant la factorisation de Cholesky

pour tout i de 1 à n:
pour tout j de 1 à n:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} l_{jk}$$

* $j = 1$:
  * $i = 1$:

$$a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad ; a_{11} > 0$$

* i de 2 à n:

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik} l_{1k} = l_{i1} l_{11} = l_{i1} \sqrt{a_{11}} \Rightarrow \boxed{l_{i1} = \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{11}}}}$$

supposons que le coeff de colonne de 1 jusqu'a $j-1$ sont connus, cherchons à determiner les coefficients de la colonne j.

l_{11} ... $l_{j-1\,j-1}$ l_{jj}
l_{n1} ... $l_{n\,j-1}$ l_{nj}
connus — à determiner

* j de 2 à n:
  * $i = j$:

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} (l_{jk})^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}_{\text{Connu}} + (l_{jj})^2$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{jj} = \sqrt{\sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2 - a_{jj}}}$$

* i de $j+1$ à n:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} = \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}_{\text{Connu}} + \underbrace{l_{ij} l_{jj}}_{\text{Connu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right]}$$

Scanné avec CamScanner

Algo Cholesky

Entrée $A \in \mathcal{M}_{n,n}$

Sortie $L \in \mathcal{M}_{n \times n}$

Debut

$L \leftarrow 0_{n,n}$

/* 1ère colonne */

$l_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$

Pour i de 2 à n faire

$l_{i1} \leftarrow \frac{a_{i1}}{l_{11}}$

Fin

/* colonne j de 2 à n */

Pour j de 2 à n faire

/* j ème col */

$l_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}$

Pour i de j+1 à n faire

$l_{ij} \leftarrow \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{jj}$

Fin

Fin

Retourner L

Fin

EX:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

-1- Vérifier si $(\mathcal{E}) : AX = b$, admet une sol°

-2- vérifier si A admet une fact de Cholesky

-3- Déterminer L par l'algo.

-4- Résoudre en utilisant L.

Rep:

-1- $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 21 - 1 - 16 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ A est inversible et par la suite le système $(\mathcal{E})$ admet une unique solution.

-2- • $A = {}^tA \Leftrightarrow$ A est symétrique (cond 1 vérifié)

• $\det(A - \lambda I_3) = \chi$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5-\lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 4] + (-(5-\lambda) + 4) - 2[2(5-\lambda) + 2]$

$= (1-\lambda)[21 + \lambda^2 - 2\lambda] + \lambda - 1 + 2(\lambda - 1)4 - 20 + 4\lambda$

$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 26\lambda + 14$

$sp(A) = \{0,165 ; 7,68 ; 3,15\} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ (cond 2 vérifié) $\begin{cases} \lambda_1 = 0,165 \\ \lambda_2 = 7,68 \\ \lambda_3 = 3,15 \end{cases}$

$\Rightarrow$ A est définie positive

cond 1 et cond 2 $\Rightarrow$ que A admet une factorisation de Cholesky

-3- $n = 3$; $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $j = 1$;

$i = 1$:

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$

$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$i=2$;

$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -1 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$i=3$;

$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = -2 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$j=2$;

$i=2$;

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 2 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$i=3$

$l_{32} = (a_{32} - l_{31} \times l_{21}) / l_{22} = 0 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$j=3$;

$i=3$;

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = 1 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on pose $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$; $\boxed{(E_1) : Ly = b}$

$\begin{cases} y_1 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 = 2 \\ -2y_1 + y_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{3}{2} \\ y_3 = 1 \end{cases}$; $y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{(E_2) : L^T x = y}$ on pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$L^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(E_2) \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 = \frac{3}{2} \\ x_3 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{4} \\ x_3 = 1 \\ x_1 = \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$

* Méthode QR

$A = QR$

$Q \in M_{n \times n}$ orthogonale ($^tQ = Q^{-1}$)

$R \in M_{n \times n}$ triangulaire supérieure

$AX = b = QRX \Rightarrow {}^tQQRx = {}^tQb$

$\Rightarrow (E') = Rx = b'$

la méthode QR permet d'écrire A comme le produit de la matrice Q et R avec Q est une matrice orthogonale de taille n et R une matrice triang. sup. si A s'écrit Q.R, alors pour résoudre (E) il suffit de résoudre (E') : Rx = Le système (E') est facile à résoudre car c'est un système à matrice triangulaire.

Scanné avec CamScanner